



সগানো মন্ত্র: সগিতি: সগানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Minor/Dsc 1st Semester Examination, 2025

MATHMIN101/MATHDSC101-MATHEMATICS

CLASSICAL ALGEBRA AND MATRIX THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / সমূহ-ক / বিভাগ-ক

1. Answer any *four* questions: 3×4 = 12
- যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
কোন চার প্রশ্নের উত্তর দেওঃ
- (a) Solve the equation $2x^3 - 12x^2 + 42x - 16 = 0$ given that the roots are in G.P. 3
সমীকরণটির সমাধান করঃ
$$2x^3 - 12x^2 + 42x - 16 = 0$$

যেখানে প্রদত্ত বীজগুলি গুণসত্ত্ব প্রণয়িত আছে।
সমীকরণ $2x^3 - 12x^2 + 42x - 16 = 0$ লাই সমাধান কর জসকো মূলহরু G.P. মা চ।
- (b) Find the principal value of $(1+i)^i$. 3
 $(1+i)^i$ -এর মুখ্য মান বের কর।
 $(1+i)^i$ কো মুখ্য মান নির্ণয় কর।
- (c) Prove that $1/\lambda$ is an eigen value of A^{-1} if λ is an eigen value of a non-singular matrix A . 3
যদি λ একটি Eigen value হয় একটি non-singular ম্যাট্রিক্স A এর, তাহলে প্রমাণ কর যে,
 $1/\lambda$ একটি eigen value হবে A^{-1} এর।
যদি λ এডটা non-singular মেট্রিক্স A কা eigen মান মং $1/\lambda$ মেট্রিক্স A^{-1} কা eigen মান
হুন্ড মনি প্রমাণ কর।
- (d) Using the Cayley-Hamilton theorem find the inverse of $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. 3
Cayley-Hamilton উপপাদ্য ব্যবহার করে $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত (inverse) ম্যাট্রিক্স বের কর।
কাইলে হেমেলটন উপপাদ্য প্রয়োগ করে $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ কা inverse নির্ণয় কর।
- (e) Find the roots of the equation $x^5 + 1 = 0$. 3
 $x^5 + 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি বের কর।
সমীকরণ $x^5 + 1 = 0$ কা মূলহরু নির্ণয় কর।
- (f) If a, b, c are positive real numbers show that 3

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq a + b + c$$

যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, দেখাও যে,

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তবিক সংখ্যা ভিন্ন প্রমাণ কর।

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

GROUP-B / সমূহ-খ / বিভাগ-খ

Answer any four questions

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কোন চার প্রশ্নহরুকা উত্তর দেও

2. Using Ferrari's method solve the equation $x^4 + 12x - 5 = 0$. 6

$x^4 + 12x - 5 = 0$ সমীকরণটি ফেরারি (Ferrari's) পদ্ধতি ব্যবহার করে সমাধান কর।

ফেরারি বিধি প্রয়োগ করে $x^4 + 12x - 5 = 0$ লাই সমাধান কর।

3. If x is real and $x > 0$ then show that $i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$. 6

যদি x একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $x > 0$, দেখাও যে

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$$

যদি x একটি বাস্তবিক সংখ্যা এবং $x > 0$ ভিন্ন প্রমাণ কর : $i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$.

4. Prove that $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$. 6

প্রমাণ কর : $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$ ।

প্রমাণ কর $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$ ।

5. If $x, y, z > 0$ and $x + y + z = 1$, show that $8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27}$. 6

যদি $x, y, z > 0$ এবং $x + y + z = 1$, দেখাও যে, $8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27}$ ।

যদি $x, y, z > 0$ র $x + y + z = 1$ ভিন্ন প্রমাণ কর $8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27}$ ।

6. Find the row reduced Echelon form of $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির হ্রাসকৃত সারি-একেলন-ফর্ম (Row Reduced Echelon) নির্ণয় কর।

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ কা row reduced Echilon রূপ নির্ণয় কর।

7. Using only the row operations find the inverse of $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

6

শুধুমাত্র সারি-ভিত্তিক-অপারেশন (Row Operation) ব্যবহার করে $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির

বিপরীত (Inverse) ম্যাট্রিক্স বের কর।

Row operation মাত্র প্রয়োগ করে $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ কা inverse নির্ণয় কর।

GROUP-C / সমূহ-গ / বিভাগ-গ

Answer any two questions

12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কোন দুই প্রশ্নহরুকা উত্তর দেও

8. (a) If α, β and γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find the equation whose roots are $\alpha\beta + \beta\gamma, \beta\gamma + \gamma\alpha$ and $\gamma\alpha + \alpha\beta$. 6+6

যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি হয় α, β এবং γ , তাহলে সমীকরণটি বের কর যার বীজগুলি হয় $\alpha\beta + \beta\gamma, \beta\gamma + \gamma\alpha$ এবং $\gamma\alpha + \alpha\beta$ ।

যদি α, β, γ সমীকরণ $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ কা মূলহরু হয় $\alpha\beta + \beta\gamma, \beta\gamma + \gamma\alpha$ র $\gamma\alpha + \alpha\beta$ মূলহরু হরুকা সমীকরণ নির্ণয় কর।

- (b) For three positive numbers show that their A.M \geq G.M \geq H.M.

তিনটি ধনাত্মক সংখ্যার জন্য দেখাও যে,

পাটিগাণিতিক গড় (A.M) \geq গুণোত্তরীয় গড় (G.M) \geq বিবর্ত যৌগিক গড় (H.M)

তিনবটা ধনাত্মক সংখ্যাহরুকা লাগী A.M \geq G.M \geq H.M হুন্ট মনি প্রমাণ কর।

9. (a) Define eigen value and eigen vector of a matrix. Find the eigen values and the 7+5

corresponding eigen vectors of $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

একটি ম্যাট্রিক্সের eigen value এবং eigen ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির

eigen values এবং অনুরূপ (corresponding) eigen vector গুলি বের কর।

এতটা মেট্রিক্সকা eigen value র eigen vector কা পরিমাণা দেও। মেট্রিক্স $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ কা

eigen মান র eigen vector নির্ণয় কর।

- (b) Express the matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ as product of elementary matrices.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে প্রাথমিক ম্যাট্রিক্স (Elementary matrices) গুলির গুণ হিসাবে প্রকাশ কর।

মেট্রিক্স $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ লাই elementary মেট্রিক্সকা গুণানফলমা প্রকাশিত কর।

10.(a) Determine the condition for which the following system of equations

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= b \\ x + ay + 3z &= b + 1 \end{aligned}$$

6+6

has (i) only one solution (ii) infinitely many solutions and (iii) no solution.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= b \\ x + ay + 3z &= b + 1 \end{aligned}$$

সিস্টেমটির (i) শুধুমাত্র একটি সমাধান আছে (ii) অসীম সংখ্যক সমাধান আছে (iii) কোন সমাধান নেই। এমন a এবং b এর মানগুলি নির্ণয় কর।

সমীকরণ প্রণালী

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= b \\ x + ay + 3z &= b + 1 \end{aligned}$$

কা (i) মাত্র এক সমাধান (ii) অসীমিত ধের সমাধান (iii) সমাধান হুদৈন। হুনে অবস্থা নির্ণয় কর।

(b) Using congruence operation find the rank and signature of the matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

সর্বসমত অপারেশন (Congruence operation) ব্যবহার করে $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির র্যাঙ্ক

(rank) এবং সিগনেচার (signature) বের কর।

Congruence operation প্রয়োগ গর মেট্রিক্স $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ কা rank র signature নির্ণয় কর।

11.(a) If a, b, c are all real numbers greater than 1, prove that

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) < 8(abcd+1)$$

6+6

যদি a, b, c সবাই এক এর থেকে বড় বাস্তব সংখ্যা হয়, প্রমাণ কর যে,

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) < 8(abcd+1)$$

যদি a, b, c সবই 1 মন্বা বড়ী বাস্তবীক সংখ্যা ধর প্রমাণ কর

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) < 8(abcd+1)$$

(b) Expand $\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ in a series of cosines of multiples of θ .

$\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ কে cosine এর সিরিজ (series) θ -এর বহুগুণ (multiple) হিসাবে প্রসারিত (Expand) কর।

$\sin^4 \theta \cos^2 \theta$ লাই, cosine of θ কৌ multiples কৌ শ্রীখললামা লেখ।